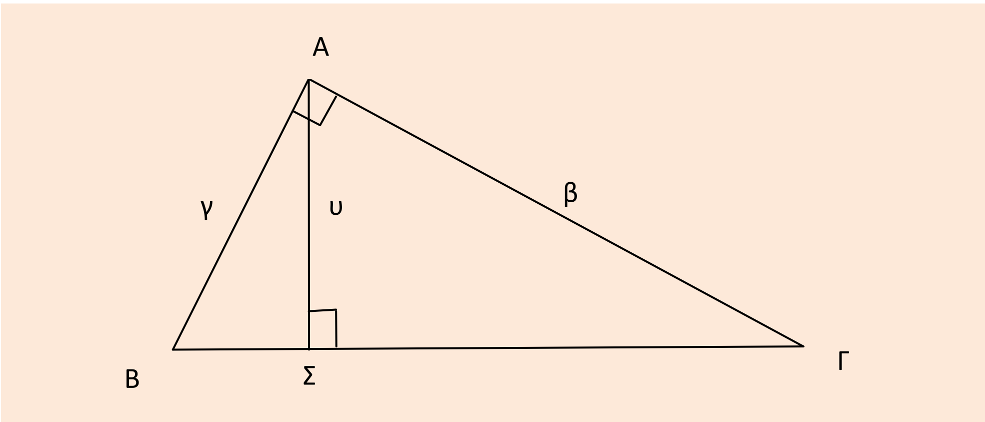
Ένα πρόβλημα Γεωμετρίας με έμφαση στην ακολουθούμενη πορεία

1. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή γωνία την Α. Αν ΑΣ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Α στην υποτείνουσα δείξτε ότι $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{\upsilon^2}$ όπου $(\mathrm{AB})=\gamma, (\mathrm{A\Gamma})=\beta$ και $(\mathrm{A\Sigma})=\upsilon$.
2. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Ε επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ. Από το σημείο Δ φέρουμε την ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο Ε και τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ζ. Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος δείξτε ότι:
$\frac{1}{(\Delta \mathrm{Z})^2}+\frac{1}{(\Delta \mathrm{E})^2}=\frac{1}{(\mathrm{B\Gamma})^2}$.

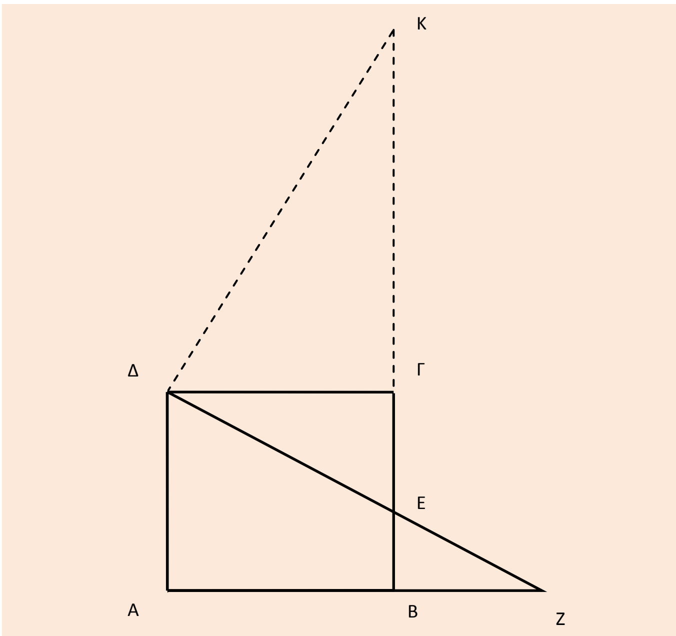
Απάντηση:

1. $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{\upsilon^2} \Leftrightarrow \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2\gamma^2}=\frac{1}{\upsilon^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2\gamma^2}=\frac{1}{\upsilon^2} \Leftrightarrow \alpha^2\upsilon^2=\beta^2\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha\upsilon=\beta\gamma$

   Η τελευταία ισότητα συνάγεται άμεσα είτε με χρήση των τύπων του



   εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ είτε από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΣΒ και ΑΒΓ.



2. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΔZ η οποία τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο Κ. Τα τρίγωνα ΓΔΚ και ΑΔΖ είναι ίσα επειδή $\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\Gamma}=1\llcorner$, $\mathrm{K}\widehat{\Delta}\Gamma=\mathrm{Z}\widehat{\Delta}\mathrm{A}$ (έχουν τις πλευρές τους κάθετες και είναι αμφότερες οξείες)

και $\Delta\Gamma = \Delta A$. Συνεπώς $\Delta Z = \Delta K$ (Ι)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΕ για το οποίο το ΔΓ είναι ύψος, με βάσει το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε $\frac{1}{(\Delta K)^2} + \frac{1}{(\Delta E)^2} = \frac{1}{(\Delta\Gamma)^2}$ η οποία με βάση την (Ι) και το ότι $B\Gamma = \Gamma\Delta$ (πλευρές τετραγώνου) γράφεται $\frac{1}{(\Delta Z)^2} + \frac{1}{(\Delta E)^2} = \frac{1}{(B\Gamma)^2}$.