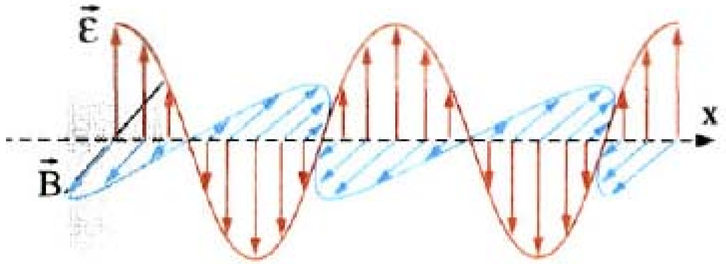
Πρόχειρες σημειώσεις
στα
επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επιμέλεια ύλης : Δρ. Κορφιάτης Ε. (korfiatis@sch.gr)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Διάδοση επίπεδων ΗΜΚ σε μη αγώγια μέσα

1.1. Η διάδοση του κύματος

Οι εξισώσεις του Maxwell σε ένα γραμμικό υλικό είναι

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\vec{J}_f + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Απουσία πηγών γίνονται:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad (1.1.1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (1.1.2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (1.1.3)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (1.1.4)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι ένα σύστημα πρώτης τάξης ΔΕ με μερικές παραγώγους το οποίο όμως είναι συξευγμένο (στην ίδια εξίσωση υπάρχουν και Ε και Β)
Ο στροβιλισμός της (1.1.3) είναι

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

Κάνοντας χρήση της (1.1.4) έχουμε:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1.5)$$

Με χρήση της ταυτότητας $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$ μπορούμε να αναπαράγουμε μια διαφορική ταυτότητα για τον στροβιλισμό του στροβιλισμού.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - (\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$$

Όμως $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$. Επομένως $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\nabla^2\vec{E}$ (1.1.6)

Αντικαθιστώντας την (1.1.6) στην (1.1.5) έχουμε:

$$\nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1.7)$$

Ομοίως παίρνοντας τον στροβιλισμό της (1.1.4) και κάνοντας χρήση της (1.1.3) έχουμε ότι:

$$\nabla^2\vec{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1.8)$$

Θέτουμε $\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ και καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο απουσία πηγών ικανοποιούν την κυματική εξίσωση.

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Η εξισώσεις αυτές ισχύουν για το κενό και για διηλεκτρικά υλικά με μηδενική αγωγιμότητα.

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος δίνεται από την σχέση: $\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ (1.1.9)

Στο κενό η ταχύτητα διάδοσης είναι $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

Ο δείκτης διάθλασης ενός υλικού ορίζεται από την σχέση: $n = \frac{c}{\upsilon} = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}$ (1.1.10)

Τα επίπεδα αρμονικά κύματα είναι οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης της μορφής:

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{\kappa}\vec{r}-\omega t)}$ και $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{\kappa}\vec{r}-\omega t)}$ (1.1.11)

Αντικαθιστώντας τα πεδία στην κυματική εξίσωση έχουμε ότι : $\omega = \kappa\upsilon$

Στην σχέση (1.1.11) τα πλάτη θεωρούνται μιγαδικοί αριθμοί.

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Maxwell έχουμε:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \Leftrightarrow \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 0 \Leftrightarrow E_{0x}\kappa_x + E_{0y}\kappa_y + E_{0z}\kappa_z = 0 \Leftrightarrow \vec{E} \perp \vec{\kappa}$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0 \Leftrightarrow B_{0x}\kappa_x + B_{0y}\kappa_y + B_{0z}\kappa_z = 0 \Leftrightarrow \vec{B} \perp \vec{\kappa}$$

Ομοίως το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Από τον νόμο του Faraday έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα $\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = \vec{\nabla}f \times \vec{A} + f\,\vec{\nabla} \times \vec{A}$ με $\vec{A} = \vec{E}_0$ =σταθερό και

$f = e^{i(\vec{\kappa}\vec{r}-\omega t)}$ έχουμε $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}f \times \vec{E}_0$

Όμως $\frac{\partial f}{\partial x} = i\kappa_x f$, $\frac{\partial f}{\partial y} = i\kappa_y f$, $\frac{\partial f}{\partial z} = i\kappa_z f$

Άρα $\vec{\nabla}f = if(\kappa_x\vec{e}_x + \kappa_y\vec{e}_y + \kappa_z\vec{e}_z) = if\vec{\kappa}$

Επομένως $\vec{\nabla}\times\vec{E} = if\,\vec{\kappa}\times\vec{E}_0 = i\,\vec{\kappa}\times\vec{E}$

Ομοίως $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -i\omega f\vec{B}$

Έτσι ο νόμος του Faraday γίνεται

$$\vec{B} = \frac{\vec{\kappa}\times\vec{E}}{\omega} \tag{1.1.12}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετα μεταξύ τους.

<u>Σχόλια:</u>

i) Τα μέτρα των πεδίων συνδέονται με την σχέση:

$$B = \frac{E\kappa}{\omega} \Rightarrow B = \frac{E}{\upsilon}$$

ii)Η πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας είναι

$$U_{EB} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2$$

Όμως $\frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2\mu}\frac{E^2}{\upsilon^2} = \frac{1}{2\mu}E^2\mu\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

Επομένως $U_{EB} = \varepsilon E^2$

iii) Η πυκνότητα ροής ενέργειας είναι το διάνυσμα Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu\omega}\vec{E}\times(\vec{\kappa}\times\vec{E}) = \frac{1}{\mu\omega}\left[(\vec{E}.\vec{E})\vec{\kappa} - (\vec{\kappa}.\vec{E})\vec{E}\right] = \frac{1}{\mu\omega}\left[E^2\vec{\kappa} - 0\right] = \frac{1}{\mu\kappa\upsilon}E^2\vec{\kappa} \Rightarrow$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu\upsilon}E^2\vec{e}_\kappa = \frac{1}{\mu\upsilon^2}E^2\upsilon\vec{e}_\kappa = \frac{\mu\varepsilon}{\mu}E^2\upsilon\vec{e}_\kappa = \varepsilon E^2\vec{\upsilon} \Rightarrow \vec{S} = U\vec{\upsilon} \tag{1.1.13}$$

iii) Η πυκνότητα ορμής είναι:

$$\vec{p} = \frac{\vec{S}}{\upsilon^2} = \frac{1}{\upsilon^2}U\vec{\upsilon}$$

iv) Η ένταση του κύματος είναι

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\upsilon E_0^2 \tag{1.1.14}$$

1.2. Συνοριακές συνθήκες

Στην διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων 1 και 2 έχουμε εν γένει για γραμμικά διηλεκτρικά.

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = \sigma_f \qquad \vec{E}_{1//} - \vec{E}_{2//} = 0$$

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \qquad \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{1//} - \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_{2//} = \vec{K}_f\times\hat{n}$$

όπου οι δείκτες $\perp$ (//) δηλώνουν συνιστώσες κάθετες (παράλληλες) στην διαχωριστική επιφάνεια , σ_f η επιφανειακή πυκνότητα ελεύθερου φορτίου , K_f η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος στην επιφάνεια και $\hat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια.

Αν δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία ή ρεύματα στην επιφάνεια, τότε οι συνοριακές συνθήκες γίνονται:

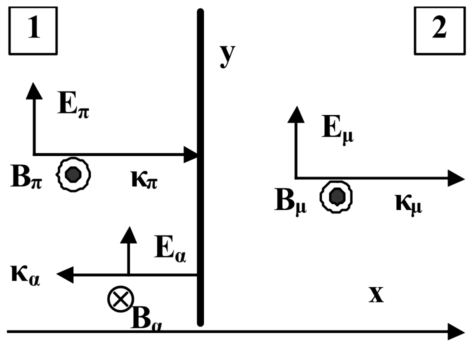
$$\varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = 0 \qquad (1.2.1)$$

$$\vec{E}_{1//} - \vec{E}_{2//} = 0 \qquad (1.2.2)$$

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \qquad (1.2.3)$$

$$\frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{1//} - \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_{2//} = 0 \qquad (1.2.4)$$

2. Ανάκλαση και διάδοση για πρόσπτωση κάθετη στην επιφάνεια.



Προσπίπτοντας το κύμα στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων, ένα μέρος του ανακλάται και ένα μέρος του μεταδίδεται στο υλικό 2.

Για τα τρία κύματα έχουμε:

Προσπίπτον: $\vec{E}_\pi = E_{0\pi} e^{i(\kappa_1 x - \omega t)}\,\vec{e}_y \qquad \vec{B}_\pi = B_{0\pi} e^{i(\kappa_1 x - \omega t)}\,\vec{e}_z$ (2.1)

Ανακλώμενο: $\vec{E}_\alpha = E_{0\alpha} e^{i(-\kappa_1 x - \omega t)}\,\vec{e}_y \qquad \vec{B}_\alpha = -B_{0\alpha} e^{i(-\kappa_1 x - \omega t)}\,\vec{e}_z$ (2.2)

Μεταδιδόμενο: $\vec{E}_\mu = E_{0\mu} e^{i(\kappa_2 x - \omega t)}\,\vec{e}_y \qquad \vec{B}_\mu = B_{0\mu} e^{i(\kappa_2 x - \omega t)}\,\vec{e}_z$ (2.3)

Στα δύο υλικά το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι:

Υλικό 1: $\vec{E}_1 = \vec{E}_\pi + \vec{E}_\alpha \qquad \vec{B}_1 = \vec{B}_\pi + \vec{B}_\alpha$

Υλικό 2: $\vec{E}_2 = \vec{E}_\mu \qquad \vec{B}_2 = \vec{B}_\mu$

<u>Συνοριακές συνθήκες στην διαχωριστική επιφάνεια</u> (x=0):

$$\vec{E}_{1//} = \vec{E}_{2//} \Rightarrow E_{0\pi} + E_{0\alpha} = E_{0\mu} \Rightarrow -E_{0\alpha} + E_{0\mu} = E_{0\pi} \qquad (2.4\alpha)$$

$$\frac{B_{1//}}{\mu_1} = \frac{B_{2//}}{\mu_2} \Rightarrow \frac{B_{0\pi} - B_{0\alpha}}{\mu_1} = \frac{B_{0\mu}}{\mu_2} \Rightarrow \frac{E_{0\pi} - E_{0\alpha}}{\mu_1 \upsilon_1} = \frac{E_{0\mu}}{\mu_2 \upsilon_2} \Rightarrow \frac{n_1}{\mu_1}E_{0\alpha} + \frac{n_2}{\mu_2}E_{0\mu} = \frac{n_1}{\mu_1}E_{0\pi} \qquad (2.4\beta)$$

Ορίζουμε τους <u>συντελεστές πλάτους ανάκλασης και μετάδοσης</u> μέσω των σχέσεων

$$p = \frac{E_{0\alpha}}{E_{0\pi}} \quad \text{και} \quad \tau = \frac{E_{0\mu}}{E_{0\pi}} \tag{2.5}$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (2.4) με $E_{0\pi}$ έχουμε το σύστημα:

$$-p + \tau = 1$$

$$\frac{n_1}{\mu_1} p + \frac{n_2}{\mu_2} \tau = \frac{n_1}{\mu_1}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε:

$$p = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} - \frac{n_2}{\mu_2}}{\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}} \quad \text{και} \quad \tau = \frac{2\frac{n_1}{\mu_1}}{\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}} \tag{2.6}$$

Ο **συντελεστής ανάκλασης R** (**συντελεστής μετάδοσης T**) ορίζεται ως το πηλίκο της ενέργειας που ανακλάται από την (διαδίδεται στην) μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου προς την ενέργεια που προσπίπτει στην μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου.

Η ενέργεια που προσπίπτει κάθετα στην μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου είναι

$$I_\pi = \langle \vec{S}_\pi . \hat{n} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \upsilon_1 E_{0\pi}^2$$

Ισχύει ότι $n = \dfrac{c}{\upsilon} = c\sqrt{\mu\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{n^2}{c^2 \mu}$

Άρα $\varepsilon\upsilon = \dfrac{\varepsilon c}{n} = \dfrac{n}{c\mu}$

Επομένως

$$I_\pi = \langle \vec{S}_\pi . \hat{n} \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_1}{c\mu_1} E_{0\pi}^2 \tag{2.7}$$

Η ενέργεια που ανακλάται κάθετα από την μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου είναι

$$I_\alpha = \langle \vec{S}_\alpha . \hat{n} \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_1}{c\mu_1} E_{0\alpha}^2 \tag{2.8}$$

Η ενέργεια που μεταδίδεται κάθετα από την μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου είναι

$$I_\mu = \langle \vec{S}_\mu . \hat{n} \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_2}{c\mu_2} E_{0\mu}^2 \tag{2.9}$$

Επομένως οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης είναι:

$$R = \left(\frac{E_{0a}}{E_{0\pi}} \right)^2 = p^2 \qquad T = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} \left(\frac{E_{0\mu}}{E_{0\pi}} \right)^2 = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} \tau^2 \tag{2.10}$$

Στην περίπτωση που το διηλεκτρικό δεν παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες ισχύει ότι $\mu_1=\mu_2=\mu_0$.

Οι σχέσεις (2.6) και (2.10) γίνονται:

$$p = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad \tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \tag{2.11}$$

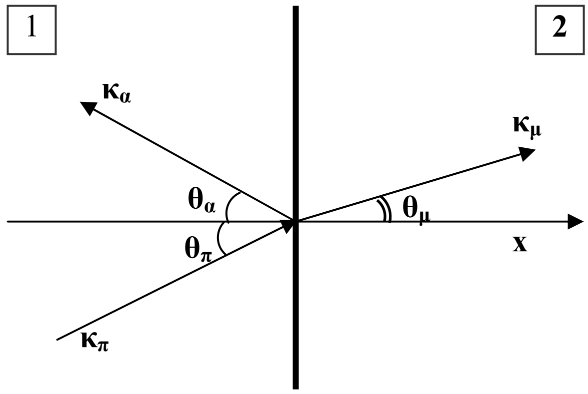
$$R = p^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad T = \frac{n_2}{n_1}\tau^2 = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \tag{2.12}$$

<u>Σχόλια</u>

1) Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι R+T=1 όπως αναμένουμε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας.
2) Επειδή $\tau>0$ το μεταδιδόμενο κύμα έχει πάντα την ίδια φάση με το προσπίπτον
3) Αν $n_1>n_2$ (το κύμα διαδίδεται από πυκνό σε αραιό μέσο) τότε $p>0$ και επομένως το ανακλώμενο κύμα έχει την ίδια φάση με το προσπίπτον
4) Αν $n_1<n_2$ (το κύμα διαδίδεται από αραιό σε πυκνό μέσο) τότε $p<0$ και επομένως το ανακλώμενο κύμα έχει διαφορά φάσης π με το προσπίπτον

3. Μελέτη της πλάγιας πρόσπτωσης

3.1. Ο νόμος του Snell στην πλάγια πρόσπτωση



Το προσπίπτον το ανακλώμενο και το μεταδιδόμενο ηλεκτρικό κύμα έχουν εξισώσεις

$$\vec{E}_{\pi} = \vec{E}_{0\pi} e^{i(\vec{\kappa}_{\pi}\vec{r} - \omega t)} \qquad (3.1.1)$$

$$\vec{E}_{\alpha} = \vec{E}_{0\alpha} e^{i(\vec{\kappa}_{\alpha}\vec{r} - \omega t)} \qquad (3.1.2)$$

$$\vec{E}_{\mu} = \vec{E}_{0\mu} e^{i(\vec{\kappa}_{\mu}\vec{r} - \omega t)} \qquad (3.1.3)$$

Επειδή η συχνότητα καθορίζεται από την πηγή του κύματος είναι ίδια και για τα τρία κύματα.
Για τους κυματικούς αριθμούς έχουμε:

$$\kappa_{\pi} = \frac{\omega}{\upsilon_1} = \frac{\omega}{c} n_1 \qquad \kappa_{\alpha} = \frac{\omega}{\upsilon_1} = \frac{\omega}{c} n_1 = \kappa_{\pi} \qquad \kappa_{\mu} = \frac{\omega}{\upsilon_2} = \frac{\omega}{c} n_2 \qquad (3.1.4)$$

Έστω $\vec{r}_0$ το διάνυσμα θέσης τυχαίου σημείου της διαχωριστικής επιφάνειας.

Οι συνοριακές συνθήκες στην διαχωριστική επιφάνεια είναι της μορφής

$$(...)e^{i(\vec{\kappa}_{\pi}\vec{r}_0 - \omega t)} + (...)e^{i(\vec{\kappa}_{\alpha}\vec{r}_0 - \omega t)} = (...)e^{i(\vec{\kappa}_{\mu}\vec{r}_0 - \omega t)}$$

Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς ένα σημείο της επιφάνειας. Έστω $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα επί της επιφάνειας. Ισχύει ότι $\vec{r}_0 = \gamma_1\vec{\varepsilon}_1 + \gamma_2\vec{\varepsilon}_2$ με γ_1, γ_2 κατάλληλους πραγματικούς αριθμούς.

Για να ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες για οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας και οποιαδήποτε χρονική στιγμή πρέπει οι τρεις εκθέτες να είναι ίσοι μεταξύ τους .

Επομένως

$$\vec{\kappa}_{\pi}.\vec{r}_0 = \vec{\kappa}_{\alpha}.\vec{r}_0 = \vec{\kappa}_{\mu}.\vec{r}_0 \qquad (3.1.5)$$

Το **επίπεδο πρόσπτωσης** είναι εξ ορισμού το επίπεδο που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια και την προσπίπτουσα ακτίνα.

Από το πρώτο μέλος της (3.1.5) έχουμε

$$\vec{\kappa}_{\pi}.\vec{r}_0 = \vec{\kappa}_{\alpha}.\vec{r}_0 \Rightarrow (\vec{\kappa}_{\alpha} - \vec{\kappa}_{\pi}).\vec{r}_0 = 0$$

Άρα το διάνυσμα $(\vec{\kappa}_\alpha - \vec{\kappa}_\pi)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειας και επομένως είναι κάθετο στην επιφάνεια (παράλληλο του $\hat{n}$)

Έτσι έχουμε:

$$\vec{\kappa}_\alpha - \vec{\kappa}_\pi = s\hat{n} \Rightarrow \vec{\kappa}_\alpha = \vec{\kappa}_\pi + s\hat{n}$$

Επομένως το $\vec{\kappa}_\alpha$ βρίσκεται στο επίπεδο πρόσπτωσης

Ομοίως το $\vec{\kappa}_\mu$ βρίσκεται στο επίπεδο πρόσπτωσης

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το επίπεδο πρόσπτωσης είναι το επίπεδο xy (z=0).

Έστω θ_π, θ_α, θ_μ, οι γωνίες που σχηματίζουν η προσπίπτουσα , η ανακλώμενη και η μεταδιδόμενη ακτίνα με την κάθετη στην επιφάνεια.

Εφαρμόζοντας την σχέση (3.1.5) για $\vec{r}_0 = \vec{e}_y$ έχουμε:

$$\vec{\kappa}_\pi \vec{e}_y = \vec{\kappa}_\alpha \vec{e}_y = \vec{\kappa}_\mu . \vec{e}_y \Rightarrow \kappa_\pi \sin\theta_\pi = \kappa_\alpha \sin\theta_\pi = \kappa_\mu \sin\theta_\mu$$

και επειδή $\kappa_\alpha = \kappa_\pi \Rightarrow \sin\theta_\alpha = \sin\theta_\pi \Rightarrow \boxed{\theta_\alpha = \theta_\pi}$ (3.1.6)

Επίσης $\kappa_\pi \sin\theta_\pi = \kappa_\mu \sin\theta_\mu \Rightarrow \dfrac{\omega n_1}{c}\sin\theta_\pi = \dfrac{\omega n_{21}}{c}\sin\theta_\mu \Rightarrow \boxed{n_1 \sin\theta_\pi = n_2 \sin\theta_\mu}$ **(Snell)** (3.1.7)

Διερεύνηση νόμου Snell – Ολική εσωτερική ανάκλαση

Από την σχέση (3.1.7) έχουμε ότι:

$$n_1 \sin\theta_\pi = n_2 \sin\theta_\mu \Rightarrow \sin\theta_\mu = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_\pi$$

Περίπτωση 1: Το κύμα διαδίδεται από αραιότερο σε πυκνότερο μέσο.

Τότε $n_1 < n_2 \Rightarrow \sin\theta_\mu < 1$

Επομένως υπάρχει μεταδιδόμενη δέσμη για οποιαδήποτε τιμή της γωνίας πρόσπτωσης.

Περίπτωση 2: Το κύμα διαδίδεται από πυκνότερο σε αραιότερο μέσο.

Τότε $n_1 > n_2$ και το $\sin\theta_\mu$ μπορεί να είναι οτιδήποτε

Η κρίσιμη τιμή της γωνίας πρόσπτωσης είναι εκείνη για την οποία

$$\sin\theta_\mu = 1 \Leftrightarrow \sin\theta_\pi = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\alpha\rho\alpha\iota\acute{o}}{\pi\upsilon\kappa\nu\acute{o}}$$

Ορίζουμε λοιπόν την κρίσιμη γωνία πρόσπτωσης μέσω της σχέσης

$$\boxed{\sin\theta_{o\rho} = \frac{n_2}{n_1}} \qquad (3.1.8)$$

Περίπτωση 2α: $\theta_\pi < \theta_{o\rho}$

Τότε $\theta_\pi < \theta_{o\rho} \Rightarrow \sin\theta_\pi < \sin\theta_{o\rho} \Rightarrow \sin\theta_\pi < \dfrac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sin\theta_\mu < 1$

Επομένως έχουμε κανονική μεταδιδόμενη δέσμη

Περίπτωση 2β: $\theta_\pi > \theta_{o\rho}$

Στην περίπτωση αυτή $\sin\theta_\mu>1$.

Αν στο σημείο αυτό μας φρενάρει η μαθηματική αυστηρότητα, θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο φυσικό συμπέρασμα ότι δεν έχουμε μεταδιδόμενη δέσμη.

Ας χαλαρώσουμε λίγο την αυστηρότητά μας σκεπτόμενοι το εξής:

Εν γένει $\vec{\kappa}_\mu = \kappa_x\vec{e}_x + \kappa_y\vec{e}_y = \kappa_\mu \cos\theta_\mu \vec{e}_x + \kappa_\mu \sin\theta_\mu \vec{e}_y = \kappa_\mu(\cos\theta_\mu\vec{e}_x + \sin\theta_\mu\vec{e}_y)$

Ας δούμε προς το παρόν το $\sin\theta_\mu$ σαν ένα συντελεστή που πολλαπλασιάζει το κ_μ για να δώσει το κ_y. Αν $\sin\theta_\mu>1$ τότε το $\cos\theta_\mu$ είναι φανταστικός αριθμός και επομένως το κ_x φανταστικός. Επομένως το $i\kappa_x$ πραγματικός. Άρα η μεταδιδόμενη δέσμη μειώνεται εκθετικά.

Ας γίνουμε ποιο ακριβείς

Ισχύει ότι $\vec{\kappa}_\mu = \kappa_{\mu x}\vec{e}_x + \kappa_{\mu y}\vec{e}_y$ (3.1.9α)

με $\kappa_{\mu x}^2 + \kappa_{\mu y}^2 = \kappa_\mu^2 = \dfrac{\omega^2}{\upsilon_2^2} = \dfrac{\omega^2}{\upsilon_1^2}\dfrac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2} = \kappa_\pi^2\dfrac{n_2^2}{n_1^2} = \kappa_\pi^2 \sin^2\theta_{o\rho}$ (3.1.9β)

Σύμφωνα με την σχέση (3.1.5) στην διαχωριστική επιφάνεια (x=0) ισχύει ότι:

$\vec{\kappa}_\mu.\vec{r}_0 = \vec{\kappa}_\pi.\vec{r}_0 \Rightarrow \vec{\kappa}_\mu.\vec{e}_y = \vec{\kappa}_\pi.\vec{e}_y \Rightarrow \kappa_{\mu y} = \kappa_\pi \sin\theta_\pi$ (3.1.10)

$$\kappa_{\mu x}^2 + \kappa_{\mu y}^2 = \kappa_\pi^2\sin^2\theta_{o\rho} \Rightarrow \kappa_{\mu x}^2 = \kappa_\pi^2\sin^2\theta_{o\rho} - \kappa_\pi^2\sin^2\theta_\pi = -\kappa_\pi^2(\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho})$$

Θέτουμε $\alpha = \sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}}$ (3.1.11)

Επομένως $\kappa_{\mu x} = i\alpha\kappa_\pi$ (3.1.12)

Από τις σχέσεις (3.1.9α), (3.1.10), (3.1.12) προκύπτει ότι:

$\vec{\kappa}_\mu = \kappa_\pi(i\alpha\kappa_\pi\vec{e}_x + \sin\theta_\pi\vec{e}_y)$ (3.1.13)

Συνεπώς,

$i(\vec{\kappa}_\mu.\vec{r} - \omega t) = i(i\alpha\kappa_\pi x + \kappa_\pi \sin\theta_\pi y - \omega t) = -\alpha\kappa_\pi x + i(\kappa_\pi\sin\theta_\pi y - \omega t)$ (3.1.14)

Ο πραγματικός όρος φανερώνει εκθετική μείωση κατά μήκος του άξονα x και ο φανταστικός όρος φανερώνει χρονική περιοδικότητα και χωρική περιοδικότητα κατά μήκος του άξονα y.

$e^{i(\vec{\kappa}_\mu.\vec{r}-\omega t)} = e^{-\alpha\kappa_\pi x}e^{i(\kappa_\pi\sin\theta_\pi y-\omega t)} = e^{-\alpha\kappa_\pi x}[\cos(\kappa_\pi\sin\theta_\pi y - \omega t) + i\sin(\kappa_\pi\sin\theta_\pi y - \omega t)]$ (3.1.15)

<u>Σχόλιο</u>

Στην σχέση (3.1.13) που δίνει το $\vec{\kappa}_\mu$ μπορούμε να καταλήξουμε ευκολότερα ως εξής:

$$\vec{\kappa}_\mu = \kappa_\mu(\cos\theta_\mu\vec{e}_x + \sin\theta_\mu\vec{e}_y)$$

Ισχύει ότι: $\kappa_\mu = \dfrac{\omega}{\upsilon_2} = \dfrac{\omega}{\upsilon_1}\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \kappa_\pi\dfrac{n_2}{n_1}$ $\qquad \sin\theta_\mu = \dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_\pi$

$$\cos\theta_\mu = \sqrt{1-\sin^2\theta_\mu} = \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_\pi} = \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\left(\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2\theta_\pi\right)} \Rightarrow$$

$$\cos\theta_\mu = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\sin^2\theta_{o\rho} - \sin^2\theta_\pi} = i\frac{n_1}{n_2}\sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}} = i\frac{n_1}{n_2}\alpha \qquad (3.1.16)$$

Επομένως

$$\vec{\kappa}_\mu = \kappa_\pi \frac{n_2}{n_1}(i\frac{n_1}{n_2}\alpha\vec{e}_x + \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_\pi\vec{e}_y) = \kappa_\pi(i\alpha\vec{e}_x + \sin\theta_\pi\vec{e}_y)$$

Περίπτωση 2γ: $\theta_\pi = \theta_{o\rho}$

Ακολουθώντας να ίδια βήματα με την περίπτωση 2β καταλήγουμε ότι

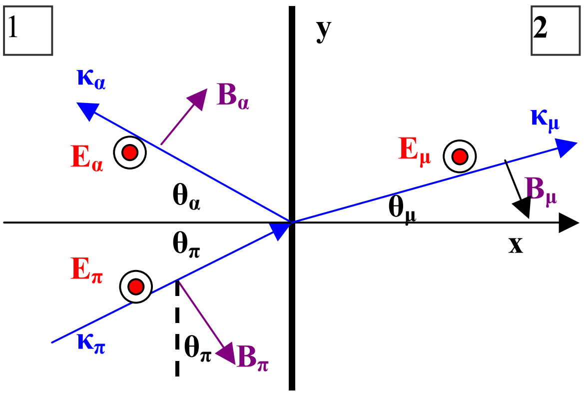
$\kappa_{\mu y} = \kappa_\pi \sin\theta_{o\rho}$ και $\kappa_{\mu x} = 0$. Άρα $\vec{\kappa}_\mu = \kappa_\pi \sin\theta_\pi\vec{e}_y$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε την περίπτωση 2γ ως ειδική περίπτωση της 2α με $\theta_\mu = \frac{\pi}{2}$.

$$\vec{\kappa}_\mu = \kappa_\mu(\cos\theta_\mu\vec{e}_x + \sin\theta_\mu\vec{e}_y) = \kappa_\mu\vec{e}_y = \frac{\omega}{\upsilon_2}\vec{e}_y = \frac{\omega}{\upsilon_1}\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\vec{e}_y = \frac{\omega}{\upsilon_1}\frac{n_2}{n_1}\vec{e}_y = \kappa_\pi\sin\theta_\pi\vec{e}_y$$

3.2. Πόλωση κάθετη στο επίπεδο πρόσπτωσης

(Το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης)



$$\vec{E}_\pi = \vec{E}_{0\pi} e^{i(\vec{\kappa}_\pi \vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B}_\pi = \vec{B}_{0\pi} e^{i(\vec{\kappa}_\pi \vec{r} - \omega t)} \tag{3.2.1}$$

$$\vec{E}_\alpha = \vec{E}_{0\alpha} e^{i(\vec{\kappa}_\alpha \vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B}_\alpha = \vec{B}_{0\alpha} e^{i(\vec{\kappa}_\alpha \vec{r} - \omega t)} \tag{3.2.2}$$

$$\vec{E}_\mu = \vec{E}_{0\mu} e^{i(\vec{\kappa}_\mu \vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B}_\alpha = \vec{B}_{0\alpha} e^{i(\vec{\kappa}_\alpha \vec{r} - \omega t)} \tag{3.2.3}$$

Για τα σημεία της επιφάνειας οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \tag{3.2.4}$$

$$\vec{E}_{1//} = \vec{E}_{2//} \tag{3.2.5}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \tag{3.2.6}$$

$$\frac{B_{1//}}{\mu_1} = \frac{B_{2//}}{\mu_2} \tag{3.2.7}$$

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \Rightarrow 0 = 0$$

$$\vec{E}_{1//} = \vec{E}_{2//} \Rightarrow E_{0\pi} + E_{0\alpha} = E_{0\mu} \Rightarrow -E_{0\alpha} + E_{0\mu} = E_{0\pi}$$

Διαιρούμε με $E_{0\pi}$ για να εμφανίσουμε τους συντελεστές πλάτους ανάκλασης και μετάδοσης:

$$-p + \tau = 1 \tag{3.2.8}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \Rightarrow B_{0\pi} \sin\theta_\pi + B_{0\alpha} \sin\theta_\alpha = B_{0\mu} \sin\theta_\mu$$

Όμως $B_0 = \dfrac{E_0}{\upsilon} = \dfrac{E_0 n}{c}$, $\theta_\alpha = \theta_\pi$, και $\sin\theta_\mu = \dfrac{n_1}{n_2} \sin\theta_\pi$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω έχουμε

$$E_{0\pi} n_1 \sin\theta_\pi + E_{0\alpha} n_1 \sin\theta_\pi = E_{0\mu} n_2 \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_\pi \Rightarrow E_{0\pi} + E_{0\alpha} = E_{0\mu}$$

Δηλαδή είναι ισοδύναμη με την (3.2.5)

$$\frac{B_{1//}}{\mu_1}=\frac{B_{2//}}{\mu_2}\Rightarrow -\frac{B_{0\pi}\cos\theta_\pi}{\mu_1}+\frac{B_{0\alpha}\cos\theta_\alpha}{\mu_1}=-\frac{B_{0\mu}\cos\theta_\mu}{\mu_2}\Rightarrow$$

$$-\frac{E_{0\pi}n_1\cos\theta_\pi}{\mu_1}+\frac{E_{0\alpha}n_1\cos\theta_\pi}{\mu_1}=-\frac{E_{0\mu}n_2\cos\theta_\mu}{\mu_2}$$

Διαιρώντας με $E_{0\pi}$, για τους συντελεστές πλάτους προκύπτει ότι:

$$\frac{n_1\cos\theta_\pi}{\mu_1}p+\frac{n_2\cos\theta_\mu}{\mu_2}\tau=\frac{n_1\cos\theta_\pi}{\mu_1} \qquad (3.2.9)$$

Λύνοντας το σύστημα των (3.2.8) και (3.2.9) έχουμε:

$$p_\perp=\frac{\dfrac{n_1\cos\theta_\pi}{\mu_1}-\dfrac{n_2\cos\theta_\mu}{\mu_2}}{\dfrac{n_1\cos\theta_\pi}{\mu_1}+\dfrac{n_2\cos\theta_\mu}{\mu_2}} \qquad \tau_\perp=\frac{2\dfrac{n_1\cos\theta_\pi}{\mu_1}}{\dfrac{n_1\cos\theta_\pi}{\mu_1}+\dfrac{n_2\cos\theta_\mu}{\mu_2}} \qquad (3.2.10)$$

Αν τα υλικά δεν παρουσιάζουν μαγνητικές ιδιότητες τότε $\mu_1=\mu_2=\mu_0$

και οι παραπάνω σχέσεις γίνονται

$$p_\perp=\frac{n_1\cos\theta_\pi-n_2\cos\theta_\mu}{n_1\cos\theta_\pi+n_2\cos\theta_\mu} \qquad \tau_\perp=\frac{2n_1\cos\theta_\pi}{n_1\cos\theta_\pi+n_2\cos\theta_\mu} \qquad (3.2.11)$$

Για να βρούμε τους συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης πρέπει να υπολογίσουμε την ενέργειεα που προσπίπτει, ανακλάται και μεταδίδεται <u>κάθετα</u> στην επιφάνεια.

Το διάνυσμα Poynting για ένα αρμονικό ΗΜΚ είναι

$$\vec{S}=U\vec{\upsilon}=\varepsilon E^2\vec{\upsilon}$$

Η ενέργεια που προσπίπτει ανά μονάδα χρόνου κάθετα στην μονάδα επιφάνειας είναι η συνιστώσα του διανύσματος Poynting που είναι κάθετη στην επιφάνεια

Επομένως $S_\perp=\varepsilon E^2\vec{\upsilon}.\vec{\eta}=\varepsilon E^2\upsilon\cos\theta$

Η ένταση του κύματος είναι η μέση τιμή (ως προς τον χρόνο) της συνιστώσας αυτής. Επομένως

$$I=\langle S_\perp\rangle=\frac{1}{2}\varepsilon\upsilon E_0^2\cos\theta$$

Όταν η διάδοση γίνεται από αραιό σε πυκνό, ή από πυκνό σε αραιό με γωνία πρόσπτωσης μικρότερη της κρίσιμης έχουμε

$$R=\frac{I_\alpha}{I_\pi}=\frac{\varepsilon_1\upsilon_1\cos\theta_\alpha E_{0\alpha}^2}{\varepsilon_1\upsilon_1\cos\theta_\pi E_{0\pi}^2}\Rightarrow R=p^2$$

$$T=\frac{I_\mu}{I_\pi}=\frac{\varepsilon_2\upsilon_2\cos\theta_\mu E_{0\mu}^2}{\varepsilon_1\upsilon_1\cos\theta_\pi E_{0\pi}^2}\Rightarrow T=\frac{\varepsilon_2\upsilon_2\cos\theta_\mu}{\varepsilon_1\upsilon_1\cos\theta_\pi}\tau^2$$

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\Rightarrow\varepsilon\upsilon=\frac{1}{\mu\upsilon}$$

$n = \frac{c}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon = \frac{n}{c}$. Αντικαθιστώντας στο ευ έχουμε $\varepsilon\upsilon = \frac{n}{\mu c}$

Υποθέτοντας ότι $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ έχουμε για τον συντελεστή μετάδοσης

$$T = \frac{n_2 \cos\theta_\mu}{n_1 \cos\theta_\pi}\tau_\perp^2 = \frac{n_2 \cos\theta_\mu}{n_1 \cos\theta_\pi}\frac{4n_1^2 \cos^2\theta_\pi}{(n_1 \cos\theta_\pi + n_2 \cos\theta_\mu)^2} = \frac{4n_1 n_2 \cos\theta_\pi \cos\theta_\mu}{(n_1 \cos\theta_\pi + n_2 \cos\theta_\mu)^2}$$

Σχόλια

- Εύκολα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι R+T=1
- Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι στην περίπτωση που το κύμα διαδίδεται από οπτικώς πυκνότερο μέσο σε οπτικώς αραιότερο με γωνία πρόπτωσης μικρότερη της κρίσιμης τότε $p_\perp > 0$ και $\frac{dp_\perp}{d\theta_\pi} > 0$. Συνεπώς $\frac{dR}{d\theta_\pi} > 0$.

  Επομένως ο συντελεστής ανάκλασης είναι αύξουσα συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης.
- Όταν $\theta_\pi=\theta_{o\rho}$, τότε $\theta_\mu = 1 \Rightarrow p_\perp = 1 \Rightarrow R = 1$. Άρα η δέσμη ανακλάται ολικά.

Ολική εσωτερική ανάκλαση για κάθετη πόλωση

Υποθέτουμε ότι $\theta_\pi>\theta_{o\rho}$

Τότε $\sin\theta_{o\rho} = \frac{n_2}{n_1}$, $\quad \sin\theta_\mu = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_\pi \quad \cos\theta_\mu = i\frac{n_1}{n_2}\sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}}$

Οι συντελεστές πλάτους ανάκλασης και μετάδοσης γίνονται:

$$p_\perp = \frac{\cos\theta_\pi - \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_\mu}{\cos\theta_\pi + \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_\mu} = \frac{\cos\theta_\pi - i\sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}}}{\cos\theta_\pi + i\sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}}}$$

$$\tau_\perp = \frac{2\cos\theta_\pi}{\cos\theta_\pi + \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_\mu} = \frac{2\cos\theta_\pi}{\cos\theta_\pi + i\sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}}}$$

Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z = \cos\theta_\pi + i\sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}}$

Το μέτρο του είναι $|z| = \sqrt{\cos^2\theta_\pi + \sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}} = \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$

Σε τριγωνομετρική μορφή γράφεται $z = |z|e^{i\phi/2}$

με $\tan\frac{\phi}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}}}{\cos\theta_\pi}$

Επομένως $p_\perp = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{|z|e^{-i\varphi/2}}{|z|e^{i\varphi/2}} = e^{-i\varphi} \Rightarrow \frac{E_{0\alpha}}{E_{0\pi}} = e^{-i\varphi} \Rightarrow E_{0\alpha} = e^{-i\varphi}E_{0\pi} \Rightarrow |E_{0\alpha}| = |E_{0\pi}|$

Δηλαδή το προσπίτον και το ανακλώμενο κύμα έχουν το ίδιο πραγματικό πλάτος και διαφορά φάσης φ.

Επομένως ο συντελεστής ανάκλασης είναι R=1

Ο συντελεστής πλάτους μετάδοσης είναι:

$$\tau_{\perp} = \frac{2\cos\theta_{\pi}}{z} = \frac{2\cos\theta_{\pi}}{|z|}e^{-i\varphi/2} = \frac{2\cos\theta_{\pi}}{\sqrt{1-\frac{n_2^2}{n_1^2}}}e^{-i\varphi/2}$$

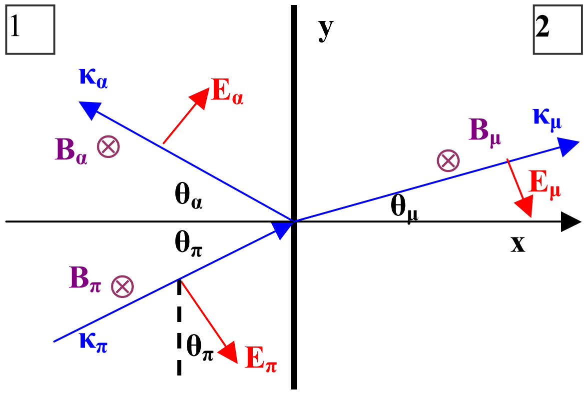
Σχόλιο

Ίσως να φαίνεται ότι το γεγονός αυτό είναι αντίθετο με την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Η ένταση του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος είναι ίσες και ταυτόχρονα υπάρχει πεδίο και στο δεύτερο μέσο.

Αν γράψουμε αναλυτικά τα πραγματικά πεδία στο δεύτερο υλικό και υπολογίσουμε το διάνυσμα Poynting, διαπιστώνουμε ότι έχει δύο συνιστώσες. Μία παράλληλη στην επιφάνεια και μια κάθετη σε αυτήν. Η μέση τιμή της κάθετης συνιστώσας έχει τιμή μηδέν. Επομένως μέσα σε μια περίοδο όση ενέργεια μετακινείται από το υλικό 1 στο υλικό 2 τόση ενέργεια μετακινείται και από το υλικό 2 στο υλικό 1.

3.3. Πόλωση παράλληλη στο επίπεδο πρόσπτωσης

(Το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης)



$$\vec{E}_{\pi} = \vec{E}_{0\pi}e^{i(\vec{\kappa}_{\pi}\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{B}_{\pi} = \vec{B}_{0\pi}e^{i(\vec{\kappa}_{\pi}\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{E}_{\alpha} = \vec{E}_{0\alpha}e^{i(\vec{\kappa}_{\alpha}\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{B}_{\alpha} = \vec{B}_{0\alpha}e^{i(\vec{\kappa}_{\alpha}\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{E}_{\mu} = \vec{E}_{0\mu}e^{i(\vec{\kappa}_{\mu}\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{B}_{\mu} = \vec{B}_{0\mu}e^{i(\vec{\kappa}_{\alpha}\vec{r}-\omega t)}$$

Για τα σημεία της επιφάνειας οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \tag{3.3.1}$$

$$\vec{E}_{1//} = \vec{E}_{2//} \tag{3.3.2}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \tag{3.3.3}$$

$$\frac{B_{1//}}{\mu_1} = \frac{B_{2//}}{\mu_2} \tag{3.3.4}$$

Ισχύει ότι:

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \Rightarrow \varepsilon_1 (E_{0\pi} \sin\theta_\pi + E_{0\alpha} \sin\theta_\alpha) = \varepsilon_2 E_{0\mu} \sin\theta_\mu \tag{3.3.1α}$$

Όμως

$\theta_\alpha = \theta_\pi$, $\quad \sin\theta_\mu = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_\pi$, $\quad \upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\mu\upsilon^2}$ $\quad n = \frac{c}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon = \frac{n}{c}$.

Αντικαθιστώντας στο ε έχουμε $\varepsilon = \frac{n^2}{\mu c^2}$

Η (3.3.1α) γίνεται:

$$\frac{n_1^2}{\mu_1 c^2}\sin\theta_\pi (E_{0\pi} + E_{0\alpha}) = \frac{n_2^2}{\mu_2 c^2} E_{0\mu} \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_\pi \Rightarrow \frac{n_1}{\mu_1}(E_{0\pi} + E_{0\alpha}) = \frac{n_2}{\mu_2} E_{0\mu} \Rightarrow$$

$$\boxed{-\frac{n_1}{\mu_1} E_{0\alpha} + \frac{n_2}{\mu_2} E_{0\mu} = \frac{n_1}{\mu_1} E_{0\pi}} \tag{3.3.5}$$

$$\vec{E}_{1//} = \vec{E}_{2//} \Rightarrow -E_{0\pi}\cos\theta_\pi + E_{0\alpha}\cos\theta_\alpha = -E_{0\mu}\cos\theta_\mu \Rightarrow -E_{0\pi}\cos\theta_\pi + E_{0\alpha}\cos\theta_\alpha = -E_{0\mu}\cos\theta_\mu \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{0\alpha}\cos\theta_\pi + E_{0\mu}\cos\theta_\mu = E_{0\pi}\cos\theta_\pi} \tag{3.3.6}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \Rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{B_{1//}}{\mu_1} = \frac{B_{2//}}{\mu_2} \Rightarrow \frac{B_{0\pi} + B_{0\alpha}}{\mu_1} = \frac{B_{0\mu}}{\mu_2} \Rightarrow \frac{E_{0\pi} + E_{0\alpha}}{\mu_1 \upsilon_1} = \frac{E_{0\mu}}{\mu_2 \upsilon_2} \Rightarrow \frac{n_1}{\mu_1}(E_{0\pi} + E_{0\alpha}) = \frac{n_2}{\mu_2} E_{0\mu}$$

που είναι ίδια με την (3.3.5)

Διαιρώντας τις (3.3.5) και (3.3.6) με $E_{0\pi}$ προκύπτει το επόμενο σύστημα για τους συντελεστές πλάτους

$$-\frac{n_1}{\mu_1} p + \frac{n_2}{\mu_2}\tau = \frac{n_1}{\mu_1}$$

$$\cos\theta_\pi p + \cos\theta_\mu \tau = \cos\theta_\pi$$

με λύση

$$p_{//} = \frac{\frac{n_2\cos\theta_\pi}{\mu_2} - \frac{n_1\cos\theta_\mu}{\mu_1}}{\frac{n_2\cos\theta_\pi}{\mu_2} + \frac{n_1\cos\theta_\mu}{\mu_1}} \qquad \tau_{//} = \frac{2\frac{n_1\cos\theta_\pi}{\mu_1}}{\frac{n_2\cos\theta_\pi}{\mu_2} + \frac{n_1\cos\theta_\mu}{\mu_1}} \tag{3.3.7}$$

Υποθέτοντας ότι $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ έχουμε:

$$p_{//} = \frac{n_2\cos\theta_\pi - n_1\cos\theta_\mu}{n_2\cos\theta_\pi + n_1\cos\theta_\mu} \qquad \tau_{//} = \frac{2n_1\cos\theta_\pi}{n_2\cos\theta_\pi + n_1\cos\theta_\mu} \tag{3.3.8}$$

Ολική ανάκλαση για πόλωση παράλληλη στο επίπεδο πρόσπτωσης

Υποθέτουμε ότι $n_1 > n_2$ και $\theta_\pi > \theta_{o\rho}$

Τότε $\sin\theta_{o\rho} = \dfrac{n_2}{n_1}$, $\quad \sin\theta_\mu = \dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_\pi \quad \cos\theta_\mu = i\dfrac{n_1}{n_2}\sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}}$

Ο συντελεστής πλάτους ανάκλασης γίνεται:

$$p_{//} = \frac{\cos\theta_\pi - i\dfrac{n_1^2}{n_2^2}\sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}}}{\cos\theta_\pi + i\dfrac{n_1^2}{n_2^2}\sqrt{\sin^2\theta_\pi - \sin^2\theta_{o\rho}}}$$

και πάλι ο συντελεστής πλάτους ανάκλασης είναι πηλίκο δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών και επομένως έχει μέτρο 1 είναι δηλαδή παράγοντας φάσης.

Γωνία Brewster και κατάργηση της ανακλώμενης δέσμης

Ισχύει ότι $p_{//} = \dfrac{n_2\cos\theta_\pi - n_1\cos\theta_\mu}{n_2\cos\theta_\pi + n_1\cos\theta_\mu}$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει γωνία πρόσπτωσης για την οποία $p_{//} = 0 \Rightarrow E_{0\alpha} = 0$.

Για αυτή την γωνία πρόσπτωσης δεν υπάρχει ανακλώμενο κύμα. Η γωνία αυτή ονομάζεται **γωνία Brewster.**

$$p_{//} = 0 \Rightarrow n_2\cos\theta_\pi = n_1\cos\theta_\mu$$

Από νόμο Snell έχουμε ότι $n_1\sin\theta_\pi = n_2\sin\theta_\mu$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2\sin\theta_\mu\cos\theta_\mu = 2\sin\theta_\pi\cos\theta_\pi \Rightarrow \sin 2\theta_\mu = \sin 2\theta_\pi \Rightarrow 2\theta_\mu = 2\theta_\pi \text{ ή } 2\theta_\mu = \pi - 2\theta_\pi$$

Η πρώτη περίπτωση απορρίπτεται και επομένως

$$\theta_\mu = \frac{\pi}{2} - \theta_\pi \Rightarrow \sin\theta_\mu = \cos\theta_\pi$$

Από τον νόμο του Snell έχουμε:

$$n_1\sin\theta_\pi = n_2\sin\theta_\mu \Rightarrow n_1\sin\theta_\pi = n_2\cos\theta_\pi \Rightarrow \tan\theta_\pi = \frac{n_2}{n_1}$$

Επειδή $\theta_\mu + \theta_\pi = \dfrac{\pi}{2}$ εύκολα φαίνεται από το σχήμα ότι $\vec{\kappa}_\alpha \perp \vec{\kappa}_\mu$

Δρ. Κορφιάτης Ε.
korfiatis@sch.gr